CENTRO DE FORMACIÓN PROFESIONAL

REVILLAGIGEDO
Jesuitas - Gijón

PRONTUARIO DE MATEMÁTICAS PARA ELECTRÓNICOS Y ELÉCTRICOS

JOSÉ MANUEL FERNÁNDEZ GARCÍA

CÁLCULO NUMÉRICO.

Redondeo.

Dependiendo de las magnitudes con que se esté trabajando y del grado de precisión que se desee, se podrán utilizar más o menos cifras decimales.
Una práctica muy extendida es la de utilizar dos cifras decimales, para lo cual se ajusta la segunda cifra en función del valor de la tercera, siguiendo los criterios siguientes:

- Si la tercera cifra es mayor de 5, se ajustará la segunda cifra hacia arriba.
- Si la tercera cifra es menor de 5, la segunda cifra decimal se dejará tal como es.
- Si la tercera cifra es igual a 5, la segunda cifra se ajustará hacia arriba si es impar, y se dejará tal como es si es par.

Como es natural, en caso de trabajar con tres cifras decimales, los anteriores criterios se establecerán en función de la cuarta cifra decimal en vez de la tercera.

Ejemplos.

Redondear a dos cifras decimales

a) 5,67898 se redondea a 5,68
b) 3,6710 se redondea a 5,67
c) 5,0982 se redondea a 5,10
d) 0,67598 se redondea a 0,68
e) 0,64598 se redondea a 0,64

Redondear a tres cifras decimales

f) 5,67898 se redondea a 5,679
g) 3,6710 se redondea a 3,671
h) 5,0982 se redondea a 5,098
i) 0,67358 se redondea a 0,674
j) 0,67258 se redondea a 0,672

Potencias de 10.

Cuando se trabaja con cifras muy grandes o muy pequeñas, es habitual trabajar en potencias de 10

Ejemplos.

Expresa en potencias de 10, utilizando una cifra entera y redondeando a cuatro decimales.

a) 56789 se podrá expresar como: $5{,}6789 \cdot 10^{4}$
b) 5678946005 se podrá expresar como: $5{,}6789 \cdot 10^{9}$
c) 56789866541 se podrá expresar como: $5{,}6790 \cdot 10^{10}$
d) 0,00000005 se podrá expresar como: $0{,}0005 \cdot 10^{-4}$
e) 0,000000009876575 se podrá expresar como: $9{,}8766 \cdot 10^{-9}$

Expresa en potencias de 10, utilizando dos cifras enteras y redondeando a tres decimales.

f) 56789465 se podrá expresar como: $56{,}789 \cdot 10^{6}$
g) 5678966005 se podrá expresar como: $56{,}790 \cdot 10^{8}$
h) 0,00009876575 se podrá expresar como: $98{,}766 \cdot 10^{-6}$

Operaciones con Potencias de 10.

Bastará con tener en cuenta las propiedades del producto y del cociente entre potencias de igual base:

- En el producto de potencias de igual base se suman los exponentes.
- En el cociente de dos potencias de igual base se restan los exponentes.

Recuérdese que $10^0 = 1$

Ejemplos.

a) $5.10^4 \times 5.10^{-4} = 5 \times 5 \,.\, 10^{4-4} = 25 \,.\, 10^0 = 25 \,.\, 1 = 25$

b) $3.10^2 \times 4.10^4 = 12.10^6$

c) $2.10^{-2} \times 3.10^6 = 6.10^4$

A menudo nos encontramos con expresiones en las que un denominador está expresado en potencias de 10 y necesitamos pasarlo hacia el numerador. Para ello, se cambiará el signo del exponente del denominador al pasarlo hacia el numerador. Análogamente, si quisiésemos pasar una potencia desde el numerador hacia el denominador.

d) $\dfrac{25}{3.10^{-4}} = \dfrac{25.10^4}{3} = 8{,}333.10^4$

e) $\dfrac{8}{2.10^3} = 4.10^{-3}$

f) $\dfrac{21.10^{-6}}{3.10^{-4}} = \dfrac{21.10^{-6}.10^4}{3} = 7.10^{-2}$

Para sumar o restar cantidades en potencias de diez, lo más cómodo es expresarlas todas ellas con la misma potencia.

g) $5.10^4 + 5.10^3 = 50.10^3 + 5.10^3 = 55.10^3$

h) $4.10^3 - 5.10^{-2} = 4.10^3 - 0{,}00005.10^3 = 3{,}99995.10^3 = 3999{,}95$

ÁLGEBRA.

Ecuaciones de Primer Grado.

Tienen la forma: $ax + b = 0$

Las expresiones a ambos lados del signo "=" se denominan "miembros", la de la izquierda corresponde al "primer miembro" y la de la derecha al "segundo miembro"

$$\underbrace{ax + b}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{0}_{\text{Segundo miembro}}$$

Resolver una ecuación supone averiguar el valor de la variable que cumple, o verifica, dicha ecuación.

El método consiste en someter a ambos miembros a la misma operación, hasta que quede aislada la variable en uno de los miembros.

Ejemplos.

a) $2x + 3 = 0 \rightarrow 2x + 3 - 3 = 0 - 3 \rightarrow 2x = -3 \rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-3}{2} \rightarrow x = \frac{-3}{2}$

Unas reglas prácticas que resumen las operaciones realizadas son las siguientes:

- Un término que esté sumando en un miembro pasará restando al otro
- Un término que esté restando en un miembro pasará sumando al otro
- Un término que esté multiplicando en un miembro pasará dividiendo al otro miembro
- Un término que esté dividiendo en un miembro pasará multiplicando al otro miembro

b) $2x + 3 = 5x \rightarrow 2x - 5x = -3 \rightarrow -3x = -3 \rightarrow x = \frac{-3}{-3} \rightarrow x = 1$

c) $2.(x + 3) = 5x + 8 \rightarrow 2x + 6 = 5x + 8 \rightarrow -3x = 2 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$

Sistemas de Ecuaciones.

Un sistema está formado por un conjunto de ecuaciones que comparten las mismas variables.
Resolver un sistema de ecuaciones supone averiguar los valores de las variables que cumplen, o verifican, todas las ecuaciones.

Para que tenga solución un sistema de ecuaciones de N variables, es preciso que el sistema esté formado por N ecuaciones independientes entre sí (que ninguna sea combinación lineal de las otras).

Los procedimientos más sencillos para resolver un sistema consisten en despejar una variable de una de las ecuaciones y sustituirla en las otras, o bien multiplicar toda una ecuación por un cierto número y sumarla o restarla a otra con el fin de eliminar una variable. Estos procedimientos se repiten hasta averiguar el valor de todas las variables.

Ejemplos.

a) $\begin{cases} 2\,x + 3\,y \;=\; 1 \\ \;\;x - 9\,y \;=\; 4 \end{cases}$

Restamos de la primera ecuación la segunda multiplicada por 2

$$\begin{array}{r} 2\,x + 3\,y \;=\; 1 \\ 2\,x - 18\,y \;=\; 8 \\ \hline 21\,y \;=\; -7 \end{array} \quad \rightarrow \quad y \;=\; \frac{-7}{21} \quad \rightarrow \quad \boxed{y \;=\; -0{,}333}$$

Este valor calculado de la “y” lo llevamos a una cualquiera de las dos ecuaciones y determinamos la otra variable. Por ejemplo, sustituyendo el valor de “y” en la segunda ecuación:

$$x - 9\,.\,(-0{,}333) \;=\; 4 \quad \rightarrow \quad x + 2{,}997 \;=\; 4 \quad \rightarrow \quad x \;=\; 4 - 2{,}997 \quad \rightarrow \quad \boxed{x \;=\; 1{,}003}$$

b) Otra forma de resolver el sistema del apartado anterior.

$\begin{cases} 2\,x + 3\,y \;=\; 1 \\ \;\;x - 9\,y \;=\; 4 \end{cases}$

Despejamos, por ejemplo, la “x” de la segunda ecuación:

$x \;=\; 4 + 9\,y$

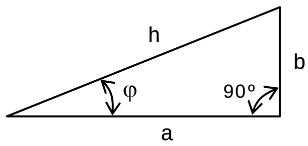
Sustituimos este valor de “x” en la primera ecuación:

$$2\,(4 + 9\,y) + 3\,y \;=\; 1 \quad \rightarrow \quad 8 + 18\,y + 3\,y \;=\; 1 \quad \rightarrow \quad 21\,y \;=\; 1 - 8 \quad \rightarrow \quad y \;=\; \frac{-7}{21} \quad \rightarrow \quad \boxed{y \;=\; -0{,}333}$$

Para determinar el valor de la “x” podemos proceder igual que hicimos en el apartado anterior.

TRIGONOMETRÍA.

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

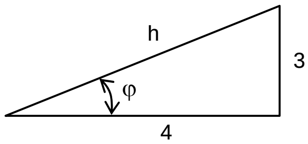


Triángulo rectángulo

Seno:	$\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{b}{h}$	Arco seno:	$\varphi = \operatorname{arcsen}\dfrac{b}{h}$
Coseno:	$\cos\varphi = \dfrac{a}{h}$	Arco coseno:	$\varphi = \operatorname{arcos}\dfrac{a}{h}$
Tangente:	$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}$	Arco tangente:	$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$

Ejemplos.

a) Dado el siguiente triángulo rectángulo, determina las funciones: senφ, cosφ y tgφ



$$h = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos\varphi = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4} = 0{,}75\ ; \text{ o también: } \operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$$

b) Sabiendo que: $\operatorname{sen}\varphi = 0{,}43$; determina el argumento o ángulo φ

$\varphi = \operatorname{arcsen} 0{,}43 = 25{,}47º$

c) Sabiendo que: $\cos\varphi = 0{,}6$; determina el argumento o ángulo φ

$\varphi = \operatorname{arcos} 0{,}6 = 53{,}13º$

d) Sabiendo que: $\operatorname{tg}\varphi = 24{,}8$; determina el argumento o ángulo φ

$\varphi = \operatorname{arctg} 24{,}8 = 87{,}69$

Algunos Valores y Relaciones Trigonométricas Importantes.

Para cualquier valor de φ se cumple:

$$-1 \leq \text{sen}\,\phi \leq 1$$

$$-1 \leq \cos\phi \leq 1$$

$$\cos^2\phi + \text{sen}^2\,\phi = 1$$

$$\text{sen}\,(-\varphi) = -\,\text{sen}\,\varphi$$

$$\cos\,(-\varphi) = \cos\varphi$$

$$\text{tg}\,(-\varphi) = -\,\text{tg}\,\varphi$$

Ejemplos.

a) $\text{sen}\ -25{,}47^\circ = -0{,}43$; $\text{sen}\ 25{,}47^\circ = 0{,}43 \rightarrow -\text{sen}\ 25{,}47^\circ = -0{,}43$

b) $\cos\ -25{,}47^\circ = 0{,}90$; $\cos\ 25{,}47^\circ = 0{,}90$

c) $\text{tg}\ -25{,}47^\circ = -0{,}47$; $\text{tg}\ 25{,}47^\circ = 0{,}47 \rightarrow -\text{tg}\ 25{,}47^\circ = -0{,}47$

d) Comprobar la expresión $\cos^2\phi + \text{sen}^2\,\phi = 1$ para un ángulo de $25{,}47^\circ$

$$\cos^2 25{,}47 + \text{sen}^2\,25{,}47 = 0{,}9^2 + 0{,}43^2 = 1$$

LOGARITMOS.

Logaritmos Decimales.

Determinar el logaritmo decimal de un número consiste en averiguar el exponente al que hay que elevar a 10 para que nos dé ese número.

$$\boxed{\log N = X \quad \Leftrightarrow \quad 10^{X} = N}$$

Los logaritmos decimales corresponden a los logaritmos en base 10 y, normalmente, se denominan simplemente “logaritmos”

Ejemplos.

a) $\log 100 = X \quad \Leftrightarrow \quad 10^{X} = 100 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

b) $\log 1 = X \quad \Leftrightarrow \quad 10^{X} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

c) $\log(-100) = X \quad \Leftrightarrow \quad 10^{X} = -100$; No existe el logaritmo de un número negativo

d) $\log 2 = X \quad \Leftrightarrow \quad 10^{X} = 2$; En este caso sería necesario utilizar la calculadora, siendo el resultado: $X = 0{,}3010299$

Propiedades Fundamentales de los Logaritmos.

a) “El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores”

$$\boxed{\log(X \cdot Y) = \log X + \log Y}$$

Ejemplo: $\log(3 \times 5) = \log 3 + \log 5 = 0{,}477121254 + 0{,}698970004 = 1{,}176091258$
$\log(3 \times 5) = \log 15 = 1{,}176091259$

b) “El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el del denominador”

$$\boxed{\log \frac{X}{Y} = \log X - \log Y}$$

Ejemplo: $\log \frac{3}{5} = \log 3 \;\; \log 5 = 0{,}477121254 - 0{,}698970004 = -0{,}221848749$
$\log \frac{3}{5} = \log 0{,}6 = -0{,}221848749$

c) “El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base”

$$\boxed{\log X^{K} = K \cdot \log X}$$

Ejemplo: $\log 3^{2} = 2 \cdot \log 3 = 2 \times 0{,}477121254 = 0{,}954242509$
$\log 9 = 0{,}954242509$

Logaritmos Neperianos.

Los logaritmos neperianos son aquellos en los que la base es el número “e”

Recuérdese que el número “e” es un número irracional de valor aproximado:

$$e = 2{,}7183$$

Por lo tanto, determinar el logaritmo neperiano de un número consiste en averiguar el exponente al que hay que elevar a “e” para que nos dé ese número.

$$\boxed{\ln N = X \quad \Leftrightarrow \quad e^{X} = N}$$

Con frecuencia, los logaritmos neperianos se denominan, simplemente, como “neperianos”.

Las propiedades fundamentales de los logaritmos, que hemos visto anteriormente, son de igual modo aplicables a los neperianos.

Ejemplos.

a) $\ln 1 = X \quad \Leftrightarrow \quad e^{X} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

b) $\ln 2{,}7183 = X \quad \Leftrightarrow \quad e^{X} = 2{,}7183 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

Antilogaritmo.

El antilogaritmo es la operación inversa del logaritmo. De tal forma que: $\boxed{\text{antilog }(\log N) = N}$

Ejemplos:

a) Sabiendo que el logaritmo de un número es 3; determínese dicho número:

$\log X = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{antilog}(\log X) = \text{antilog}\,3 \quad \Rightarrow \quad X = \text{antilog}\,3 \quad \Rightarrow \quad X = 1000$

b) Sabiendo que el logaritmo de P/5 es igual a 3; determínese el valor de P:

$\log \frac{P}{5} = 3 \Rightarrow \text{antilog}\,(\log \frac{P}{5}) = \text{antilog}\,3 \Rightarrow \frac{P}{5} = \text{antilog}\,3 \Rightarrow P = 5\,.\,\text{antilog}\,3 \Rightarrow P = 5000$

También podemos considerar el antilogaritmo neperiano: $\boxed{\text{antiln }(\ln N) = N}$

Ejemplos:

a) Sabiendo que el neperiano de un número es 1; determínese dicho número:

$\ln X = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{antiln}(\ln X) = \text{antiln}\,1 \quad \Rightarrow \quad X = \text{antiln}\,1 \quad \Rightarrow \quad X = 2{,}718281828459045$

b) Sabiendo que el neperiano de P/5 es igual a 1; determínese el valor de P:

$\ln \frac{P}{5} = 1 \Rightarrow \text{antiln}\,(\ln \frac{P}{5}) = \text{antiln}\,1 \Rightarrow \frac{P}{5} = \text{antiln}\,1 \Rightarrow P = 5\,.\,\text{antiln}\,1 \Rightarrow P = 13{,}5914$

NÚMEROS COMPLEJOS.

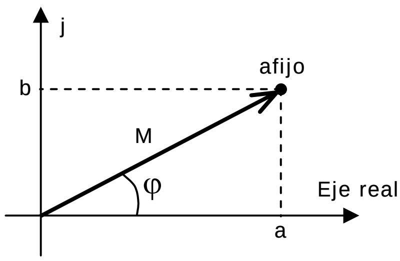
Un número complejo está formado por dos partes: una "real" y otra "imaginaria", que corresponden a las coordenadas de un punto denominado "afijo".
Uniendo el origen de coordenadas con el afijo se crea un vector que formará un cierto ángulo, o "argumento", con el eje horizontal o de abscisas.
La longitud del vector se denomina "módulo".
La abscisa del vector se corresponde con la parte real y la ordenada con la imaginaria.
La parte imaginaria la representamos mediante la magnitud correspondiente, multiplicada por "j".
A efectos de cálculo, "j" es igual a $\sqrt{-1}$

$$\text{Módulo: } M = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Argumento: } \varphi = \text{arctg}\,\frac{b}{a}$$

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{b}{M} \quad \rightarrow \quad b = M \cdot \text{sen}\,\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{M} \quad \rightarrow \quad a = M \cdot \cos\varphi$$



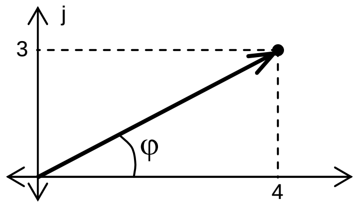
Las dos formas principales de expresar un número complejo son:

a) Forma Binómica: a + bj

b) Forma Polar: M_{φ}

Ejemplos:

a) Representa gráficamente el número complejo: 4 + 3j y exprésalo en forma polar.

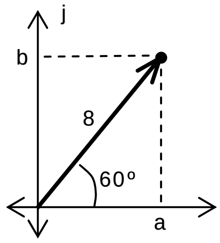


$$\text{Módulo: } M = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\text{Argumento: } \varphi = \text{arctg}\,\frac{3}{4} = 36{,}87^{o}$$

$$\boxed{\text{Forma Polar: } 5_{36{,}87^{o}}}$$

b) Representa gráficamente el número complejo: $8_{60^{o}}$ y exprésalo en forma binómica.

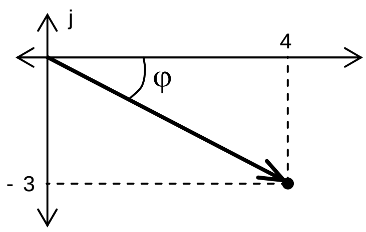


$$b = 8\,\text{sen}\,60^{o} = 6{,}93$$

$$a = 8\cos 60^{o} = 4$$

$$\boxed{\text{Forma Binómica: } 4 + 6{,}93\,j}$$

c) Representa gráficamente el número complejo: 4 - 3j y exprésalo en forma polar.



$$\text{Módulo: } M = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\text{Argumento: } \varphi = \text{arctg}\,\frac{-3}{4} = -36{,}87^{o}$$

$$\boxed{\text{Forma Polar: } 5_{-36{,}87^{o}}}$$

Operaciones con Números Complejos.

Según la operación que tengamos que hacer entre números complejos, estará más indicado que éstos se expresen en forma binómica o en forma polar.

Suma y Resta de Números Complejos.

Para sumar o restar números complejos, o en general sumar algebraicamente números complejos, los expresaremos en forma binómica y sumamos o restamos por un lado las partes reales y por el otro las imaginarias.

$$(a+b\ j) + (c+d\ j) = (a+c) + (b+d)\ j$$

Ejemplos

a) $(3+2\ j) + (4+6\ j) = 7+\ 8\ j$

b) $(3+2\ j) + (4-6\ j) = 7-4\ j$

c) $(4+6\ j) - (3+2\ j) = 1+4\ j$

Producto de Números Complejos.

Para multiplicar números complejos, los expresaremos en forma polar y se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

$$M_{\varphi} \,.\, N_{\beta} = M.N_{\varphi+\beta}$$

Ejemplos

a) $2_{30º} \,.\, 4_{16º} = 8_{46º}$

b) $2_{-30º} \,.\, 4_{16º} = 8_{-14º}$

Cociente de dos Números Complejos.

Para dividir dos números complejos, los expresaremos en forma polar y se dividen los módulos y se restan los argumentos.

$$\frac{M_{\varphi}}{N_{\beta}} = \frac{M}{N}_{\varphi-\beta}$$

Ejemplos

a) $\frac{12_{46º}}{6_{30º}} = 2_{16º}$

b) $\frac{12_{46º}}{6_{-30º}} = 2_{76º}$

c) $\frac{12_{-46º}}{6_{30º}} = 2_{-76º}$

Conjugado de un Número Complejo.

Dado un complejo de la forma $a + bj$, su conjugado sería: $a - bj$

Ejemplos

a) El complejo $2 - 4\,j$ sería el conjugado del $2 + 4j$

b) El complejo $6 + 5\,j$ sería el conjugado del $6 - 5\,j$

c) El complejo $-6 + 2\,j$ sería el conjugado del $-6 - 2\,j$

Producto de dos Números Complejos Conjugados.

Como se trata del producto de una suma por una diferencia, será igual a la diferencia de cuadrados, por lo que no es necesario expresarlos en forma polar para hacer este producto especial.

El producto de dos números conjugados es un número real. Recuérdese que $j = \sqrt{-1}$

Ejemplos

a) $(3 + 2\,j) . (3 - 2\,j) = 3^2 - (2\,j)^2 = 9 - \left(2 . \sqrt{-1}\right)^2 = 9 - 4 . (-1) = 9 + 4 = 13$

Que el producto de dos números conjugados sea un número real, es una propiedad que a menudo se utiliza al realizar ciertos desarrollos, sobre todo teóricos, tal como sucede cuando tenemos que simplificar una expresión, no numérica sino simbólica, en la que aparece un cociente de complejos que queremos expresar de la forma $x + yj$; para ello, procedemos a multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador.

b) Dado el cociente: $\dfrac{a + b\,j}{c + d\,j}$ exprésalo de la forma $x + yj$

$$\frac{a + b\,j}{c + d\,j} = \frac{(a + b\,j) . (c - d\,j)}{(c + d\,j) . (c - d\,j)} = \frac{a\,c - a\,d\,j + b\,c\,j - b\,d\,(j)^2}{c^2 - (d\,j)^2} = \frac{a\,c - a\,d\,j + b\,c\,j + b\,d}{c^2 + d^2}$$

Finalmente, nos queda la expresión: $\dfrac{a\,c + b\,d}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - a\,d}{c^2 + d^2}\,j$